CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „Adolf Haimovici”
Etapa locală, 25 februarie 2023
Clasa a IX-a
ENUNȚ ȘI BAREM

PROBLEMA 1

Comparați x cu y, unde

$$x=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+\ldots+\frac{\sqrt{2023}-\sqrt{2022}}{\sqrt{2022\cdot 2023}} \text{ şi } y=\frac{\sqrt{2023}+\sqrt{2022}}{\sqrt{2021}+\sqrt{2022}}$$

Rezolvare şi barem

Fiecare fracție este scrisă ca diferență de 2 fracții. După simplificare și reducerea termenilor asemenea se obține $x=1-\frac{1}{\sqrt{2023}}$ …………………………………………………………………….. (2p)

Observă că $x<1$ ……………………………………………………………….. (1p)

Demonstrează că $y=\frac{\sqrt{2023}+\sqrt{2022}}{\sqrt{2021}+\sqrt{2022}}>1$ ………………………………………………(2p)

Afirmă că x<y ……………………………………………………………………….(2p)

PROBLEMA 2

Calculați $S=1+2023+2023^2+\ldots 2023^n$ și demonstrați că $(2023^n-1)\,\vdots\, 2022,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

OBSERVAȚIE: Simbolul $\vdots$ se citește „se divide”

Rezolvare și barem

Calculează valoarea pentru S și obține $S=\frac{2023^n-1}{2022}$ ………………………………………(3p)

Varianta I Deoarece S este o sumă de numere naturale este tot un număr natural.

Deci $(2023^n-1)\,\vdots\, 2022,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

Varianta II Folosește metoda inducției matematice pentru demonstrație.

Indiferent de varianta folosită pentru demonstrație se vor acorda 4 puncte.

PROBLEMA 3

a) Știind că a, b, c sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice demonstrați că b+c, a+c și a+b sunt în progresie aritmetică.

b) Fie x un element al mulțimii: $A=\left\{x \middle| x\in\mathbb{Z}, |x-2|\le 3\right\}$ Aflați valoarea lui x știind că x-1, 2x+3, 3x+7 sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Rezolvare și barem

a) Scrie relația $\frac{a+c}{2}=b$ ....(1 p)

Afirmă faptul că va demonstra și demonstrează că $\frac{b+c+a+b}{2}=a+c$ ....(2 p)

b) Elementele lui A sunt $A=\{-1,0,1,2,3,4,5\}$ ....(1 p)

Observă că $\frac{x-1+3x+7}{2}=2x+3$. Deci x ar putea lua orice valoare. ....(1 p)

Doar că în acest exercițiu $x\in A=\{-1,0,1,2,3,4,5\}$, aceasta fiind soluția. ....(2 p)

PROBLEMA 4

Fie pătratul ABCD, M mijlocul laturii AB ȘI N mijlocul laturii BC.

a) Descompuneți vectorii $\overrightarrow{AN}$ ȘI $\overrightarrow{CM}$ după $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AD}$

b) Verificați dacă vectorii: $\vec{u}=3\overrightarrow{AN}+6\overrightarrow{CN}$ și $\vec{v}=-\overrightarrow{AD}$ sunt coliniari.

Rezolvare și barem

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ ....(2p)

$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ....(2p)

$\vec{u}=3(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD})+6(-\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})=-\frac{9}{2}\overrightarrow{AD}=-\frac{9}{2}\vec{v}$. ....(2p)

În concluzie vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari ....(1p)

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „Adolf Haimovici”
Etapa locală, 25 februarie 2023
Clasa a X-a

PROBLEMA 1

Calculați:

a) $15-5\sqrt[3]{0,125}$ b) $2\cdot\log_2 3+3\cdot\log_2 10-\log_2 1125$ c) $2023^{\log_{2023}5}-\log_{2023}2023^5$

Rezolvare și barem

a) $15-5\sqrt[3]{0,125}=15-5\cdot 0,5=12,5$ ………………………………………………………………(2p)

b) $2\cdot\log_2 3+3\cdot\log_2 10-\log_2 1125=\log_2 9+\log_2 1000-\log_2 1125=log_2 8\ =$ …………………(2p)

c) $2023^{\log_{2023}5}-\log_{2023}2023^5=5-5=0$ ……………………………………………………………(2p)

PROBLEMA 2

a) Determinați $\frac{x}{y}$ dacă 2lg(x-12y)=lgx + lgy, unde x>12y>0.

b) Calculați pătratul numărului a= $\log^2{}_3 9+\log_{\frac{1}{4}}2$

Rezolvare și barem

a) 2lg(x-12y) = lgx + lgy devine $(x-12y)^2=xy$ ……………………………………………(2 p)

$x^2-25xy+144y^2=0$ ………………………………………………………………(1 p)

b) Se poate împărți cu $y^2\neq 0$ ……………………………………………………………(1p)

Se obține $\frac{x}{y}$ 16 și 9. Se acceptă doar valoarea 16. …………………………………………(3p)

PROBLEMA 3

a) Calculați E= $i^{2023}+i^{-2023}+(1+i)^{20}$

b) Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația: $(1-z)(2z-1)=z^2$

Rezolvare și barem

a) E= $\frac{1}{i}+\frac{i}{1}+(2i)^{10}=2^{10}(-1)=-2^{10}$ ………………………………………………………(3p)

b) $(1-z)(2z-1)=z^2\Rightarrow$ o ecuație de gradul al doilea ……………………………………………(1p)

Se rezolvă ecuația și ....(1p)
Se calculează $z_{1,2}$ ....(2p)

PROBLEMA 4

Se dau funcțiile: $f:(0,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=2023^{x}$, $g:\mathbb{R}\rightarrow(0,\infty)$, $g(x)=\log_{2023^{-1}} x$, $h:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $h(x)=\sqrt[3]{x}$.

a) Care dintre cele trei funcții este crescătoare?

b) Care dintre cele trei funcții este funcție pară?

c) Care dintre cele trei funcții este descrescătoare?

d) Care dintre cele trei funcții este mărginită inferior?

e) Care dintre cele trei funcții este periodică?

f) Reprezentați graficul uneia dintre funcțiile date

Rezolvare și barem

a) f și h ……………………………………………..1p
b) nu există …………………………………………1p
c) g …………………………………………………1p
d) f …………………………………………………..1p
e) nu există ………………………………………...1p
f) reprezentarea graficului. ……………………….2p

TIMP DE LUCRU 3 ore

Succes!

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „Adolf Haimovici”

Etapa locală, 25 februarie 2023

Clasa a XI-a

PROBLEMA 1.

a) Demonstrați că pentru orice matrice $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ are loc relația

$X^2 - (a+d)X + (detX) \cdot I_2 = O_2$.

b) Determinați $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X^{2023} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Barem

a) $X^2 - (a+d)X + (detX) \cdot I_2 =$

$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$ ...2p

b) $(detX)^{2023} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow detX = 0$ 1p

$\overset{a)}{\Rightarrow} X^2 = (a+d)X$

Prin inducție matematică se demonstrează $X^n = (a+d)^{n-1}X$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow X^{2023} = (a+d)^{2022}X$ 1p

Ecuația devine $(a+d)^{2022} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 1p

$(a+d)^{2022} \cdot a = 3$

$(a+d)^{2022} \cdot d = 4$

Prin adunare $(a+d)^{2023} = 7 \Rightarrow a+d = 7^{\frac{1}{2023}}$ 1p

Finalizare $X = 7^{-\frac{2022}{2023}} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 1p

PROBLEMA 2.

Fie matricea $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 2k-1 \\ 3^k & \frac{1}{k(k+2)} \end{pmatrix}$. Calculați S=$A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{100}$.

Barem

Fie $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. $a = 300$ $(\mathbf{1p})$.

$$b = 1 + 3 + 5 + \cdots + 199 = \frac{(1+199) \cdot 100}{2} = 10000\ (\mathbf{2p})$$

$c = \frac{3^{101}-3}{2}$ $(\mathbf{2p})$

$d = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{100} - \frac{1}{102}\right) = \frac{101}{204}$. **(2p)**

PROBLEMA 3.

Știind că $a, b \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $a + b = \pi$, calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{tg(\,ax+bx-\pi)}{(ax+bx)^2-\pi^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{sin(\,ax+b)}{x-1}$.

Barem

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{tg(\,ax+bx-\pi)}{ax+bx-\pi}\cdot(\,ax+bx-\pi)}{(\,ax+bx-\pi)(\,ax+bx+\pi)} = \frac{1}{2\pi}$ ………………………………………………………..…………..… 3p

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{sin(\,ax+\pi-a)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{-sin(\,ax-a)}{x-1} = -a$ …………………………..……………..… 4p

PROBLEMA 4.

Fie funcția f:$\boldsymbol{R} - \{1\} \to \boldsymbol{R}, f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x+1}$. Determinați valorile lui a și b știind că drepta de eciație y=x+2 este asimptotă oblică la infinit și punctul P(2,5) aparține graficului funcției.

Barem

m=1, n=2 **(1p)**

n=$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+ax+b}{x+1} - x = a - 1 => a = 3$. **(3p)**

Din f(2)=5 =>b=5 **(3p).**

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „Adolf Haimovici”

Etapa locală, 25 februarie 2023

Clasa a XII-a

PROBLEMA 1.

Fie mulțimea $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1+2x & 4x \\ -x & 1-2x \end{pmatrix}, x \in R \right\}$.

a) $A(x)A(y) = A(x+y), \forall x, y \in \boldsymbol{R}.$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^n, n \in \boldsymbol{N}^*.$

Barem

a) Prin calcul direct rezultă $A(x)A(y) = A(x+y), \forall x, y \in \boldsymbol{R}$.**(3p)**

b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^n = \underbrace{A(1)A(1)A(1)\dots A(1)}_{n\ ori} = A(n) = \begin{pmatrix} 1+2n & 4n \\ -n & 1-2n \end{pmatrix}. (\boldsymbol{4p})$

PROBLEMA 2

Pe $A = [0,2]$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{4x+4y}{4+xy}, x, y \in A$.

a) Arătați că legea este asociativă.

b) Să se verifice că dacă $x, y, z \in A$ *și* $x * z = y * z$, atunci x=y.

c) Determinați $x \in A$ care verifică relația $x * x * x = 0$.

Barem

a) Calcul direct **(3p).**

b) Din relația $x * z = y * z$ obținem $16(y-x) = 4z^2(y-x), \forall x, y, z \in A \Rightarrow x = y$ **(2p)**

c) $x * x * x = \frac{48x+4x^3}{16+12x^2} \Rightarrow x = 0(\boldsymbol{2p})$

PROBLEMA 3.

Fie $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx, n \in N^*$.

a)Calculaţi I_2.

b) Exprimați șirul I_n în funcție de I_{n-1}.

Barem

a) $I_2 = \int_0^1 (1-2x^2+x^4)dx = \frac{8}{15}$ **(2p)**

b) $I_n = \int_0^1 (1-x^2)(1-x^2)^{n-1}dx = I_{n-1} + \frac{1}{2}x\frac{(1-x^2)^n}{n}\Big|_0^1 - \frac{I_n}{2n}$ $(\mathbf{3p})$ $=> I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}(\mathbf{2p})$.

PROBLEMA 4.

Arătați că există numerele reale a, b, c astfel încât $F(x) = (ax^2+b)cosx + cxsinx$ este o primitivă a funcției $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, f(x) = x^2 sinx$.

Barem

$F(x) = \int x^2 sinxdx = cosx(2-x^2) + 2xsinx + c$ **(4p)**

Din identificarea coeficienților obținem a=-1, b=c=2. **(3p)**